الجبر الخطي والهندسة التحليلية

المستوى الثاني تقانة

المحاضرة الثامنة

3 . طريقة غاوص (طريقة حذف المجاهيل) (Gaussian elimination):

نستعرض طريقة **الحذف:** والتي ستقودنا الى طريقة الحذف لغاوص. تعني طريقة **الحذف** ايجاد قيمة احد المجاهيل من معادلة بدلالة بقية المجاهيل ونعوض هذه القيمة في المعادلات المتبقة، فنحصل على جملة معادلات عددها اقل بواحد وعدد مجاهيلها اقل بواحد، ثم نحسب قيمة مجهول اخر من معادلة بدلالة بقية المجاهيل ونعوض هذه القيمة في المعادلات المتبقة، فنحصل على جملة معادلات عددها اقل بواحد وعدد مجاهيلها اقل بواحد، ونتابع هكذا للحصول على معادلة بمجهول واحد.

مثال 6: اوجد حل الجملة

$$\begin{aligned} 2x + 7y + 9z &= 16 \\ x + 2y + 3z &= 5 \\ 3x + 8y + 12z &= 18 \end{aligned}$$

الحل: نبادل بين المعادلتين الأولى والثانية (وهذا لن يؤثر على مجموعة الحل) فنحصل على الجملة المكافئة:

$$x + 2y + 3z = 5$$
$$2x + 7y + 9z = 16$$
$$3x + 8y + 12z = 18$$

نضرب الأولى بـ 2- ونجمعها للثانية، ثم نضرب الأولى من جديد بـ 3- ونجمعها للثالثة للتخلص من x فنحصل على الجملة المكافئة:

$$x + 2y + 3z = 5$$
$$3y + 3z = 6$$
$$2y + 3z = 3$$

نقسم طرفي المعادلة الثانية على 3 ثم نضربها من جديد بـ 2- ونجمعها للثالثة والاولى فنحصل على الجملة المكافئة:

$$\begin{aligned} x \quad\quad + z &= 1 \\ y + z &= 2 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

وأخيرا نضرب الثالثة بـ 1- ونجمعها للثانية والأولى فنحصل على الجملة المكافئة:

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= 2 \\ y \quad &= 3 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

إذن للجملة حل وحيد هو $(2,3,-1)$.

يمكن تلخيص التحويلات التي استخدمناها في الانتقال من جملة إلى جملة مكافئة لها كما يلي:

1- المبادلة بين معادلتين.

2- ضرب طرفي معادلة بعدد لا يساوي الصفر.

3- جمع حاصل ضرب معادلة بعدد لا يساوي الصفر إلى معادلة أخرى.

وهذا يقودنا إلى **المبرهنة**: إن التحويلات الأولية على جملة معادلات خطية لا يؤثر على مجموعة الحل لها.

إن هذه الطريقة هي طريقة غاوص لكن باستخدام المعادلات بدلا من المصفوفات.

تتلخص **طريقة غاوص** بتحويل جملة المعادلات الخطية المفروضة إلى جملة مكافئة لها بإجراء تحويلات أولية **سطرية** وذلك بتحويل المصفوفة الموسعة إلى الشكل المدرج. ومن ثم نناقش الرتب كما في مبرهنة كابيلي:

مثال 7: أوجد الحل بطريقة غاوص لجملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4$$

الحل: نشكل المصفوفة الموسعة ثم نحاول ردّها إلى الشكل المدرج

$$\left[A\middle|B\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&5&1\\1&3&-13&22&-1\\3&5&1&-2&5\\2&3&4&-7&4\end{array}\right]\underset{\substack{R_3-3R_1\to R_3\\R_4-2R_1\to R_4}}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{\sim}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&5&1\\0&1&-10&17&-2\\0&-1&10&-17&2\\0&-1&10&-17&2\end{array}\right]$$

$$\left[A\middle|B\right]\underset{R_4+R_2\to R_4}{\overset{R_3+R_2\to R_3}{\sim}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&5&1\\0&1&-10&17&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

واضح أن $2=r\left(A\middle|B\right)=r(A)<4$ فللجملة عدد غير منته من الحلول تعطى بدلالة $4-2=2$ مجهول اختياري.

نرد المصفوفة الأخيرة إلى معادلات فنجد:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \ , \ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2$$

$$x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2$$

نعوض المعادلة الأخيرة في المعادلة الأولى فنجد: $x_1 = -17x_3 + 29x_4 + 5$

اي: $S = \{(-17x_3 + 29x_4 + 5, 10x_3 - 17x_4 - 2, x_3, x_4); x_3, x_4 \in \square\}$

وللجملة عدد غير منته من الحلول.

إذا أعطينا $x_4 = 1$, $x_3 = 1$ فنجد أن $x_1 = 17$, $x_2 = -9$ وهذا أحد الحلول الخاصة.

وهكذا كلما أعطينا x_4 , x_3 قيم مختلفة نحصل على قيم جديدة لـ x_1 , x_2 وهي حلول خاصة.

مثال 8: أوجد الحل لجملة المعادلات الخطية التالية:

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

الحل: نشكل المصفوفة الموسعة ثم نحاول ردّها إلى الشكل المدرج

$$\left[A\middle|B\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&9\\2&4&-3&1\\3&6&-5&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&9\\0&2&-7&-17\\0&3&-11&-27\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{R_1-R_2\\R_3-3R_2}]{\frac{1}{2}R_2}$$

$$\left(A\middle|B\right)\square\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{11}{2}&\frac{35}{2}\\0&1&-\frac{7}{2}&-\frac{17}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{R_1+11R_2\\-2R_3}]{R_2-7R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right]$$

إذن $3=r\left(A\middle|B\right)=r(A)$ فللجملة حل وحيد. وتكون الجملة المكافئة للجملة الأصلية:

$$\begin{aligned}x&=1\\y&=2\\z&=3\end{aligned}$$

فالحل هو $(1,2,3)$.

مثال 9: أوجد الحل لجملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} 2x + 7y + 9z &= 16 \\ x + 2y + 3z &= 5 \\ 3x + 9y + 12z &= 15 \end{aligned}$$

الحل: نشكل المصفوفة الموسعة ثم نحاول ردّها إلى الشكل المدرج

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 9 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 12 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3 - 3R_2 \\ R_1 \leftrightarrow R_2}]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

إذن $3 = r(A|B) \neq r(A) = 2$ فالجملة مستحيلة الحل.